

**Differentiaalvergelijkingen begrijpen:  
Het wiskundig denken bij het opstellen van differentiaalvergelijkingen in kaart  
brengen**

J.A. Zwarteveen - Roosenbrand, N.C.Verhoef, H.P.Hendrikse, J.M. Pieters

**Samenvatting**

In de huidige lesmethodes wordt in het algemeen weinig aandacht besteed aan het opstellen van een differentiaalvergelijking. Voor een didactiek in dit onderdeel is het noodzakelijk om het wiskundig denken van leerlingen hierbij te kennen. In dit paper wordt beschreven hoe met behulp van een in een vooronderzoek ontwikkeld onderzoeksinstrument dit denken in kaart werd gebracht. Het duale karakter van wiskundige begrippen, in het geval van deze studie het begrip afgeleide, blijkt bij het opstellen van een differentiaalvergelijking in het wiskundig denken van de leerling lang niet altijd de gewenste plaats in te nemen.

**1. Probleemstelling en onderzoeksvraag**

Het concept differentiaalvergelijkingen (DVn) is in het technisch hoger onderwijs een belangrijk onderwerp dat door studenten als moeilijk wordt ervaren (Hulshof, 2007). Bij het vak wiskunde D komen de grondbeginselen van dit concept in de zesde klas van het vwo<sup>1</sup> aan de orde. Aan één onderdeel van dit concept, het opstellen van een DV, wordt in de meeste lesmethodes weinig aandacht besteed. Het concept DVn kan echter niet goed worden begrepen als het opstellen daarvan niet aan de orde is geweest (Chaachoua & Saglan, 2006). Om het opstellen van DVn te kunnen onderwijzen wordt in dit onderzoek het wiskundig denken van vwo-6-leerlingen in kaart gebracht. De onderzoeksvraag luidt:

*Hoe is het wiskundig denken van vwo-6-leerlingen als zij een DV opstellen?*

**2. Theoretisch kader**

Om het opstellen van DVn te kunnen onderwijzen, zal de uitgangspositie van de leerling, inclusief zijn eerder gevormde denkbeelden, misconcepties en eventueel foutieve toepassingen van de voorkennis bekend moeten zijn (Mishra & Koehler, 2006; Shulman,

<sup>1</sup> In Nederland is wiskunde D een keuzevak, dat veel wordt gekozen door middelbareschoolleerlingen ter voorbereiding op een technische vervolgstudie. Het vwo is de opleiding waarmee toegang tot de universiteit wordt verkregen.

1986). Een didactische aanpak die de leerling helpt wiskundige concepten te begrijpen is alleen succesvol als deze aansluit bij diens voorkennis en leerprocessen (Tall, 1985). Als het om het begrijpen van wiskundige concepten gaat komt in de literatuur het “dubbelzinnige” karakter van de wiskunde en het begrijpen daarvan aan de orde. Zo onderscheidt Sfard (1991) het begrijpen van een wiskundig concept in *operationeel* en *structureel* als twee kanten van dezelfde munt. Dit wordt veroorzaakt door de dualiteit van de wiskundige concepten zelf. Deze dualiteit, een *concept* is ook een *proces*, bracht Gray en Tall tot de introductie van het woord “procept” (Gray & Tall, 1994). Byers (2007) gebruikt het woord ambigüiteit voor de meervoudige betekenis van een wiskundig concept, en kenmerkt het wiskundig denken hierover als een creatieve bezigheid. In het geval van een DV komt dit “dubbelzinnige” karakter naar voren bij het begrip afgeleide en de daarbij behorende notatie  $dy/dx$  (Tall, 2009). Met de notatie  $dy/dx$  wordt immers de snelheid (rate) waarmee  $y$  verandert aangeven, en meetkundig de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van  $y(x)$  (het concept), maar ook een verhouding, een deling (het proces). Aangezien de afgeleide een wezenlijk element van een DV is, speelt deze dualiteit een belangrijke rol als het gaat om het opstellen van een DV.

Het opstellen van een DV is een speciale vorm van modelleren (Verhulst, 2008). Daarom zijn ook op het opstellen van een DV de schema's over modelleren van toepassing (Blum & Leiss, 2005; Galbraith & Stillman, 2006; Spandaw & Zwaneveld, 2009; Verhoef, Jeurnink & Van Groessen, 2009).

### 3. Onderzoeksmethode

Het onderzoek is ontwerpgericht, waarbij zowel het onderzoeksinstrument, een classificatieschema, als de voorgestelde didactiek cyclisch worden geëvalueerd (Van den Akker, Gravemeijer, Mc Kenney & Nieveen, 2006). In een vooronderzoek is het classificatieschema ontwikkeld. De basis voor dit classificatieschema wordt gevormd door de fases A-D, opgesplitst in deelfases (Tabel 1).

- A. het verkennen van de situatie (As) en het identificeren van de relevante grootheden (Ai)
- B. het kiezen van variabelen (Bv) en het toekennen van eenheden (Be)
- C. het identificeren van de onafhankelijke variabele (Ci) en het onder woorden brengen hoe de afhankelijke grootheid verandert, resp. grootheden veranderen (Cw), indien in de vorm van een differentievergelijking (Cd)
- D. het uitdrukken van deze verandering in een DV, al (Dd) dan niet (Da) voorafgegaan door een differentievergelijking, en het noemen van de randvoorwaarde (Dr)

Tabel 1. Fases A-D van het classificatieschema

De fases zijn afgeleid van stappen die genoemd worden in een studieboek over DVn voor het technisch universitair onderwijs (Boyce & DiPrima, 2005). De keuze voor dit uitgangspunt is gemaakt, omdat in deze stappen, die zijn toegepast op het opstellen van een DV, de modellschema's duidelijk te herkennen zijn (Zwarteveen, Hendrikse, Verhoef & Pieters, 2009).

In de eerste cyclus werd het instrument beproefd en bijgesteld. In de tweede cyclus, waarvan in dit paper verslag wordt gedaan, werd het wiskundig denken van vwo-6-leerlingen met behulp van dit instrument in kaart gebracht.

### *3.1. Deelnemers.*

De deelnemers aan de tweede cyclus waren wiskunde-D-leerlingen uit vwo-6 van drie verschillende streekscholen uit het noorden, oosten en midden van Nederland. De scholen waren benaderd via een bijeenkomst van experimenteerscholen voor Wiskunde D. Van de scholen uit het noorden en het oosten participeerden de volledige wiskunde-D-groepen, vier respectievelijk zes leerlingen. Van de school uit het midden participeerden vier van de negen leerlingen op grond van de spreiding van de toetsresultaten.

### *3.2. Onderzoeksinstrument*

Het onderzoeksinstrument is, zoals vermeld, een classificatieschema.

Om in kaart te brengen hoe vwo-6-leerlingen wiskundig denken, hebben zulke leerlingen een opgave hardop denkend gemaakt. Deze hardop-denksessies zijn door de onderzoeker afgenomen, op video geregistreerd en getranscribeerd, en na reductie in acties vervolgens in het schema geclassificeerd.

### *3.3. Materiaal*

De opgave (Figuur 1), die de leerlingen in de hard-op-denksessie voor zich kregen, bestond uit het opstellen van twee verschillende DVn binnen eenzelfde context, namelijk het vullen van een vat met een zoutoplossing. Het opstellen van de eerste DV vereist enige mate van structureel begrijpen van een eerste-orde-DV. De tweede eerste-orde-DV is gelijk aan een opgave die Rasmussen en Marrongelle (2006) gebruikten om hun zogenoemde Pedagogical Content Tool “generative alternatives” toe te lichten. De Amerikaanse eenheden pound en gallon zijn hierbij vervangen door SI-eenheden gram en liter. Deze keus is gemaakt om het wiskundig denken van de deelnemers aan dit

onderzoek te kunnen vergelijken met het wiskundig denken van de deelnemers aan het experiment van Rasmussen en Marrongelle.

Opgave 1  
In een vat van 500 liter zit 100 liter water, waarin 400 gram zout is opgelost. Er stroomt een zoutoplossing met een concentratie van 2 gram per liter het vat in, met een snelheid van 3 liter per minuut. De hoeveelheid wordt intussen goed gemengd en stroomt er weer uit met een snelheid van 2 liter per minuut.

- Na hoeveel minuten is het vat vol?
- Stel een differentiaalvergelijking op die de inhoud van het vat beschrijft totdat het vol is als functie van de tijd  $t$  in minuten.
- Schets een grafiek die volgens jou weergeeft wat de hoeveelheid zout is als functie van de tijd.
- Stel bij deze gegevens een differentiaalvergelijking  $dZ/dt$  op voor de hoeveelheid zout  $Z$ , als  $0 \leq t \leq 400$ .

*Figuur 1.* Opgave bij de hardop-denksessies

### 3.4. *Dataverzameling en -verwerking*

De data werden verkregen uit hardop-denksessies over het opstellen van een DV. De gegevens van een leerling waren voor de classificatie niet bruikbaar, omdat de onderzoeker de stof opnieuw moest uitleggen. Hierdoor was de invloed van de onderzoeker op de acties van de leerling te groot. De gesproken tekst en de handelingen van de overige leerlingen zijn eerst gereduceerd tot relevante tekst en handelingen (de zogenoemde acties), door overbodige herhalingen, pauzes en opmerkingen over zaken die met de opgave niets van doen hadden weg te laten. Er is voor gezorgd dat de relevante tekst vrijwel letterlijk behouden is. Deze acties zijn in het classificatieschema geplaatst, en voorzien van open en gesloten symbolen voor de deelfases van de fases A-D. Een gesloten symbool geeft aan dat de actie met inzicht gepaard ging, en een open symbool geeft aan dat de actie fouten bevatte, onvolledig was, of zonder inzicht verricht werd. De classificatie is door een tweede onderzoeker aan de hand van classificatiecriteria herhaald bij een steekproef van één uit elke school. Daar waar geen overeenstemming was zijn de classificatiecriteria aangescherpt. Met deze aangescherpte criteria zijn de acties van de deelnemers opnieuw geclassificeerd. Deze classificatie is door een derde persoon, een wiskundedocent, herhaald. Dit resulteerde in een overeenkomst van ruim 96%. Bij verschillen is op basis van consensus de classificatie opnieuw vastgelegd in het classificatieschema. De interventies van de onderzoeker tijdens de hard-op-denksessies zijn getypeerd en in het classificatieschema als zodanig herkenbaar met kleuren aangegeven, zodat er in de analyses rekening mee kon worden gehouden. De twee soorten interventies die het meest voorkwamen kunnen worden gekenmerkt met

“instructie” en “beoordeling, stand van zaken”. Deze beide interventies worden in het vervolg samengevat met de typering “aanwijzing”. Overeenkomstig de interventies zijn de acties van de leerlingen volgend op deze interventies aangegeven met verschillende symbolen, die ook weer open en gesloten kunnen zijn, in de betekenis zoals hierboven is aangegeven.

#### **4. Resultaten en conclusies**

De beantwoording van de vraag over het wiskundig denken van de leerlingen is gegrond op het eindresultaat van de hierboven beschreven classificatie. Voor elke leerling ontstond zo een classificatieschema ingevuld met de tekst van de acties, kleuren en symbolen. Een fictief voorbeeld zonder tekst toont Figuur 2.

Na dit in kaart brengen kwam naar voren dat de meeste leerlingen zonder hulp niet verkwamen bij het opstellen van een DV: slechts twee leerlingen hadden weinig aanwijzingen nodig (respectievelijk 2 en 4); bij de overige 11 leerlingen bestond gemiddeld 36,5% van de symbolen uit de symbolen  $\diamond$ ,  $\blacklozenge$ ,  $\odot$  of  $\bullet$ , met een standaarddeviatie van 11,4%.

Bij de opgaven c en d (Figuur 1) doorliepen de meeste leerlingen opvallend vaak de fase As. Bij slechts een leerling werden maar twee symbolen in de kolom As geplaatst. Voor de overige 12 leerlingen werd per leerling bij gemiddeld 39,2% van de geclassificeerde acties een symbool in de kolom As geplaatst, met een standaarddeviatie van 13,2%.

Bij 8 van de 9 leerlingen met in de kolom Da een dicht symbool, staan hieraan voorafgaand in de kolom Be dichte symbolen. Dit betekent dat deze leerlingen voordat zij uiteindelijk met inzicht een DV via de afgeleide (Da) opgesteld hebben met inzicht eenheden gebruikt hebben (Be). Dit bevestigt dat het letten op eenheden, zoals Boyce en DiPrima (2006) stelden: “make sure that each term in your equation has the same physical units.” (p.7) belangrijk is om tot een goed einde te komen. Dat het letten op eenheden van belang is bij het met inzicht opstellen van een DV is een gevolg van het duale karakter van het begrip afgeleide, zoals in paragraaf 2 is opgemerkt;  $dy/dx$  heeft namelijk als eenheid die van  $y$  gedeeld door die van  $x$ .

actie	As		Ai		Bx		Be		Cj		Cx		Cd		Da		Dd		Dx	
	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d	n	d
1		•						•												
2						•					◊									
--																				
3			g		g				g											
4		◊						◊			◊									
5		•	g		g		◊		g						◊					
6			•		•															
7						♦									◊					
8											♦									
9							◊								◊					
10															◊					
--																				
11		♦																		
12																				☺
--																				
13														◊						
14														◊						
15		◊																		
16		◊																		
17														◊						
18														•						
19		◊												◊						
--																				
20		♦												◊						
21		♦		♦		•								◊						
22														♦						
23																				◊
--																				
24																				◊
25														•						
26						☺														
28																				☺

Figuur 2. Fictieve classificatie, zonder tekst van de acties. Een reactie van de leerling op een *aanwijzing* is weergegeven met een van de symbolen ◊, ♦, ☺ of ☺. Een ongenummerde actie was niet te classificeren.

Als er ook gelet wordt op de *inhoud* van de acties, dan kan worden opgemerkt dat wanneer een leerling het duale karakter van het *procept* DV niet begrijpt, dit resulteert in het herhalen van procedurele handelingen, zoals het blijven rekenen aan de beginsituatie en het steeds willen “oplossen”. In het classificatieschema is dit zichtbaar in veel open symbolen in de As-kolom en niet-classificeerbare acties.

De door Rasmussen en Marrongelle (2006) opgemerkte verwarring bij een deel van hun leerlingen over de vorm van de DV (is de snelheid van de instroom 6*t* of 6?) werd ook opgemerkt bij een deel van de deelnemers betrokken bij dit onderzoek. Open symbolen in de D-kolom duiden vaak op deze verwarring.

## 5. Discussie

Het veelvuldig doorlopen van de fase As kan, behalve door het niet begrijpen van het duale karakter van het *procept* DV, ook veroorzaakt zijn door opgave c (Figuur 1). In de volgende cyclus zal daarom deze opgave aangepast worden.

De docentrol interfereerde met die van de onderzoeker, waardoor mogelijk sommige interventies tijdens de hardop-denksessies de antwoorden van de deelnemers stuurden. Het is de vraag of dit wenselijk is.

Het classificeren van gegevens uit hardop-denksessies is een moeizaam proces. Deels omdat de fases van modelleren niet erg duidelijk te scheiden zijn (Doerr, 2007), deels omdat de acties soms interpretatie behoeven. Hierbij is kennis van de gebruikte methode en de overtuigingen en lessen van de docent onontbeerlijk.

Omdat er een natuurlijke wisselwerking is tussen het denken van de leerling en de gebruikte methode en de overtuigingen en lessen van de docent zullen de verkregen leerlinggegevens in een vervolgonderzoek met de gebruikte methode en de overtuigingen en lessen van hun docent vergeleken worden. De verwachting is dat deze vergelijking aanwijzingen zal genereren voor een passende didactiek voor het opstellen van een DV.

## Referenties

- Blum, W. & Leiss, D. (2005). Filling Up - the problem of independence- preserving Teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (red.), *Proceedings of the European Congress of Mathematics Education*, St. Felin de Guixols, Spain, Feb 16-22.
- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. (2005). *Elementary differential equations and boundary value problems* (8th ed.). Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, Inc..
- Byers, W. (2007). *How mathematicians think*. Princeton: University Press.
- Chaachoua, H., & Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, 25(1), 15 – 22.
- Doerr, H.M.(2007). What knowledge do teacher need for teaching mathematics through Application and modelling?. In:W.Blum, P.L.Galbraith & M.Niss (red.). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 10 pp. 69–78. New York, USA: Springer.
- Gallbraith, P., & Stilman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentral Blatt für Didaktik der Mathematik*, vol 38 (2), 143-162.

- Gray, E.M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115-141.
- Hulshof, J. (2007). Echte brrrwiskunde. Gedownload op 28 april 2010 van <http://www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrrrwiskunde.pdf>
- Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technologocal Pedagogical Content Knowledge: A New framework for teacher knowledge. *Teacher College Record*, 108 (6), 1017-1054.
- Rasmussen, C., & Marrongelle, K. (2006). Pedagogical content tools: Integrating student reasoning and mathematics into instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 388–420.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Spandaw, J.G., & Zwaneveld, G. (2009). Modelleren. In A. Van Streun (Ed.), *Handboek vakdidactiek wiskunde*. Gedownload op 28 april 2010 van <http://www.fi.uu.nl/elwier/materiaal/handboek/>
- Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 110, 49-53
- Tall, D. (2009). *How humans learn to think mathematically*. In press.
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.) (2006). *Educational design research*. London: Routledge.
- Verhoef, N., Jeurink, G., & Van Groessen, B. (2009). Modelleren, hoe onderwijs je dat? *Euclides*, 84 (4), 122-125.
- Verhulst, F. (2008). *Modellen en dynamische systemen*. Gedownload op 28 april 2010 van [www.epsilon-uitgaven.nl/download.php?key=d1](http://www.epsilon-uitgaven.nl/download.php?key=d1)
- Zwarteveen, J.A., Verhoef, N.C., Hendrikse H.P., & Pieters, J.M.(2009). Differentiaalvergelijkingen begrijpen. Gedownload op 18 mei 2010 van [http://www.vliegendehollanders2006.nl/content/files/GRP1/Dudoc%202008%20Joke%20Zwarteveen%20paper\\_ORD%20juni%202009.pdf](http://www.vliegendehollanders2006.nl/content/files/GRP1/Dudoc%202008%20Joke%20Zwarteveen%20paper_ORD%20juni%202009.pdf)